ESTRUCTURAS DISIPATIVAS: POTENCIALES Y CATASTROFES -2

JULIO GEA BANACLOCHE Y MANUEL GARCIA VELARDE
Madrid

1. Introducción

Nuestro entendimiento de las transiciones de fase y procesos cooperativos entre la Naturaleza ha progresado fenomenalmente en los últimos cuarenta años y especialmente en la década de los setenta. Una transición entre dos fases o estados de la materia suele suponer cambios arquitectónicos (estructurales) y/o funcionales profundos y el cambio suele ser un proceso complejo. Por de pronto, en la región de transición se excitan fluctuaciones de variada frecuencia (longitud, talla o dimensión). Común a todas ellas es su vida limitada (temporal y espacialmente) salvo la de aquella que se establece como ganadora y que forma la fase nueva tras la transición, cuya vida es infinita comparada con la de las demás. Los ingenieros hablan del modo o fluctuación dominante que *esclaviza* a los otros. Así, la jerga científica utilizada ya conlleva la idea de que la transición es de algún modo un proceso catastrófico para, al menos, una parte del espectro de fluctuaciones (excitaciones, fases o regímenes) que compiten en la transición. Por otro lado, aunque una fase llegue a *dominar*, es decir, se establezca *macroscópicamente* no hay que olvidar que está continuamente *luchando* por mantener su estabilidad frente a la perturbación que supone las fluctuaciones o modos esclavizados e incluso otros nuevos que emergen como respuesta a la propia existencia de la nueva fase. Transición entre fases y estabilidad de una fase conllevan, pues, elementos lingüísticos y fenomenología que no difieren mucho de frases y descripciones usadas en ciencias sociales, economía o incluso en la jerga de los políticos. Tanto el estudio comparativo entre diferentes fases (analogías y diferencias entre estructuras y funciones) como el estudio de la región de transición (cuya duración y otras propiedades son macroscópicamente observables) son objeto de la mecánica estadística o sea de la teoría estadística de la interacción entre numerosos (muchos o infinitos) grados de libertad, es decir, elementos en competición. La mecánica estadística de las transiciones entre fases dichas de equilibrio (termodinámico) parece haber alcanzado su cénit aunque sigue en auge y desarrollo. Tal no es el caso en el estudio de las transiciones entre fases alejadas del equilibrio termodinámico o estructuras disipativas cuyo desarrollo aunque muy prometedor cabe calificar aún de relativamente embrionario.

La teoría de catástrofes, teoría matemática (debida a René Thom) de la que damos en los párrafos que siguen una versión lo más sencilla que hemos podido entender y hacer, cabe considerarla como una descripción matemática próxima a una de las teorías físicas de las transiciones de fase, la teoría de Lev D. Landau. Como su teoría física correspondiente pertenece al nivel puramente macroscópico aunque sirve de guía preciosa para el estudio mecanoestadístico antes mencionado. Tiene la potencia de servir, al menos como una primera descripción, tanto para las transiciones entre fases en equilibrio como entre fases muy alejadas del equilibrio. Su uso por transposición de ideas y resultados del estudio de los fenómenos (fases y transiciones) de equilibrio ha sido muy fructífero en el entendimiento de las estructuras disipativas. Tanto en la teoría de Thom, como en la teoría de Landau es crucial la existencia de un potencial, función o funcional de la que discurren las propiedades relevantes del sistema. Aunque tal propiedad restringe drásticamente la clase de fenómenos o procesos físicos a describir permite, sin embargo, llegar a entender aspectos genéricos del comportamiento de los sistemas físicos capaces de transiciones, ordenamiento y sinergismo.

2. Potencial, fases y estabilidad

Consideremos el comportamiento de una partícula en un potencial unidimensional tipo x^4; es decir, la fuerza sobre la partícula será

$$F = -dV/dx = -x^3 \qquad (1)$$

con $V = x^4$. Imaginémonos a la partícula inmóvil en el fondo del pozo. Esta es una posición de equilibrio estable, como el mismo dibujo (fig. 1) intuitivamente sugiere: si se mueve ligeramente la partícula, aparece sobre ella una fuerza recuperadora que tiende a volverla a su posición inicial. Si no hay rozamiento presente, la inercia de la partícula hará que rebase esta posición y que permanezca indefinidamente oscilando en torno a la posición de equilibrio $x = 0$ (se habla de estabilidad en sentido de A. Lyapunoff); pero, en cuanto haya un rozamiento, por pequeño que éste sea, la partícula irá perdiendo energía, hasta quedar inmóvil en el fondo del pozo (entonces hay estabilidad asintótica) (fig. 2). En lo que sigue supondremos que siempre hay alguna fuerza de rozamiento presente, aunque sea pequeña (pues en física suele ser la estabilidad asintótica lo que interesa) y nos imaginaremos a la partícula estable cuando esté inmóvil en el fondo del pozo (por supuesto que en este caso el potencial $V = x^4$ ya no describe correctamente *todas* las fuerzas que actúan sobre la partícula, al no incluir las de rozamiento; más adelante tendremos esto en cuenta con más detalle).

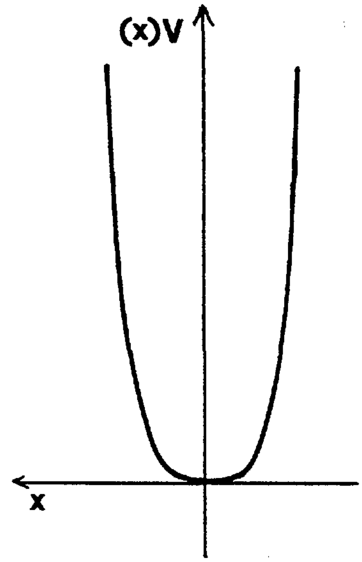

FIGURA 1

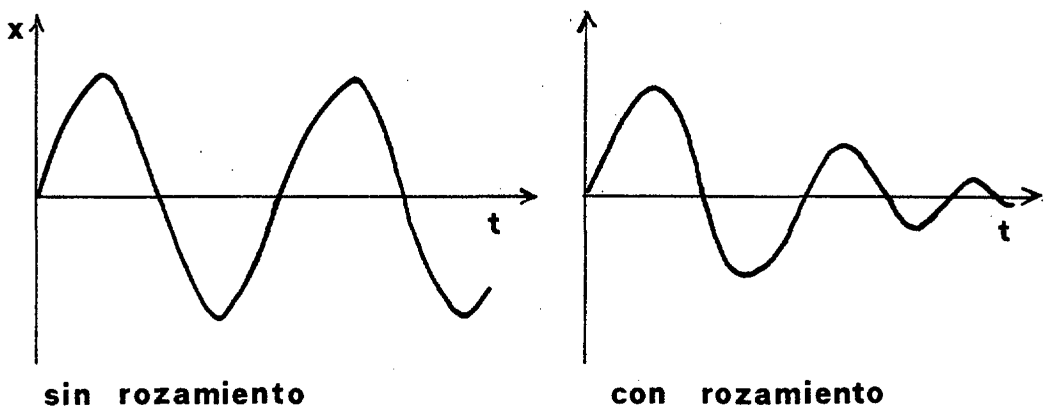

FIGURA 2

Supongamos que perturbamos ligeramente el potencial V(x). Esta perturbación puede ser externa o incluso puede considerarse como espontánea y equivale a modificar ligeramente las fuerzas que actúan sobre la partícula. Supongamos que, como consecuencia de esta modificación, el potencial pasa a ser el que teníamos antes más un pequeño término proporcional, por ejemplo, a x^3 lo escribiremos εx^3, con ε pequeño. (Proporcional a x^3 o a x es lo mismo a expensas de un cambio en el origen de coordenadas).

La gráfica del potencial

$$V_1(x) = x^4 + \varepsilon x^3 \qquad (2)$$

no es ya simétrica con respecto al eje vertical y el punto $x = 0$ ya no es un punto de equilibrio estable: a la más ligera perturbación de su reposo inicial, la partícula abandonará su posición inestable para «caer» al fondo del nuevo pozo en $x = -3\varepsilon/4$, en el que se detendrá finalmente, si hay alguna fuerza de rozamiento.

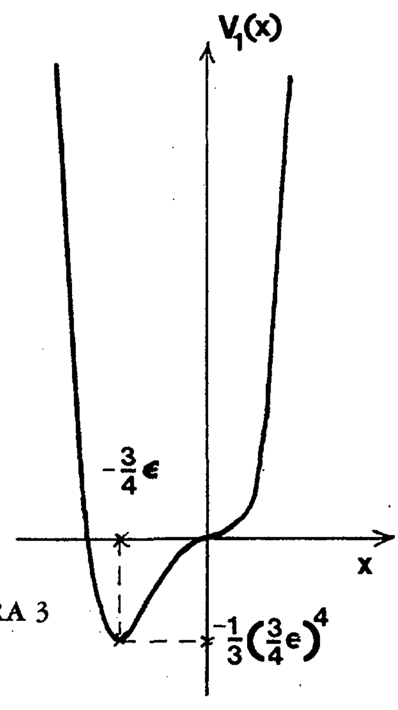

FIGURA 3

Más grande aún es el cambio en V si en vez de un término en x^3 se le suma un pequeño término de la forma $-\varepsilon x^2$ (con ε positivo). Entonces se tiene

$$V_2(x) = x^4 - \varepsilon\, x^2 \qquad (3)$$

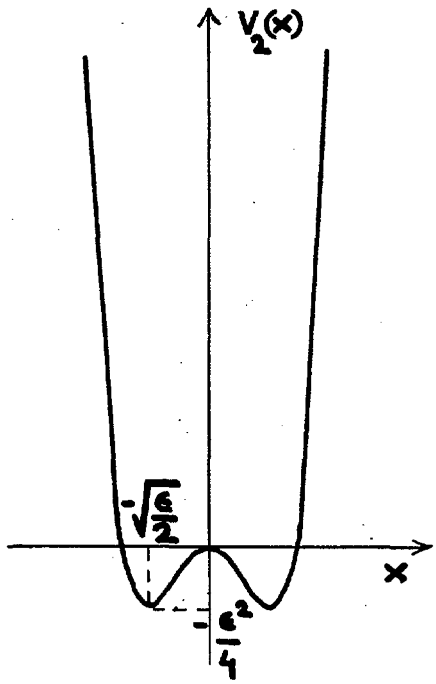

FIGURA 4

y ahora, al margen de la pequeñez de ε, hay dos pozos estables, a ambos lados del central, que es inestable; los dos mínimos o fases tienen dominios de estabilidad de igual profundidad. En cuanto se le suministre el más pequeño movimiento a la partícula, ésta caerá a un lado o a otro, de manera brusca. Hay entonces una transición entre *fases*.

Así pues, si empezamos con una partícula en un potencial x^4, y modificamos ligeramente las fuerzas que actúan sobre ella, de modo que pase a ser de la forma (2) ó (3), es casi seguro que observaremos antes o después un salto brusco y «espontáneo» en el comportamiento de la partícula. Nótese, en cambio, que esto no hubiera ocurrido si el potencial de partida fuera del tipo x^2, aunque este tenga una forma muy parecida al x^4. En efecto, tanto los potenciales

$$V_3(x) = x^2 + \varepsilon x^3 \qquad (4)$$

como

$$V_4(x) = x^2 \pm \varepsilon x^4 \qquad (5)$$

siguen teniendo un mínimo en el origen y, para ε lo bastante pequeño, el pozo correspondiente es bastante ancho y profundo (ver fig. 5). Así pues, en este caso la partícula no llevará a cabo ningún salto brusco, si inicialmente está en reposo en el origen, $x = 0$.

Todo esto sugiere que existe una diferencia importante entre un potencial de tipo x^2 y uno de tipo x^4; diferencia que se traducirá en el distinto comportamiento de los sistemas por ellos descritos. El potencial x^4 tiene un mínimo que puede transformarse en un máximo o en un punto de inflexión mediante una perturbación tan pequeña como se quiera, adecuadamente escogida: se dice que es un mínimo *estructuralmente inestable* (no confundir esta estabilidad con la otra llamada de Lyapunoff: en tanto que mínimo, sigue siendo un punto de equilibrio estable para la partícula). Como consecuencia de esto, el sistema descrito por el potencial experimentará cambios bruscos de fases (su «estado físico» o «fase» descrita es su posición, en este caso) cuando la forma del potencial cambie.

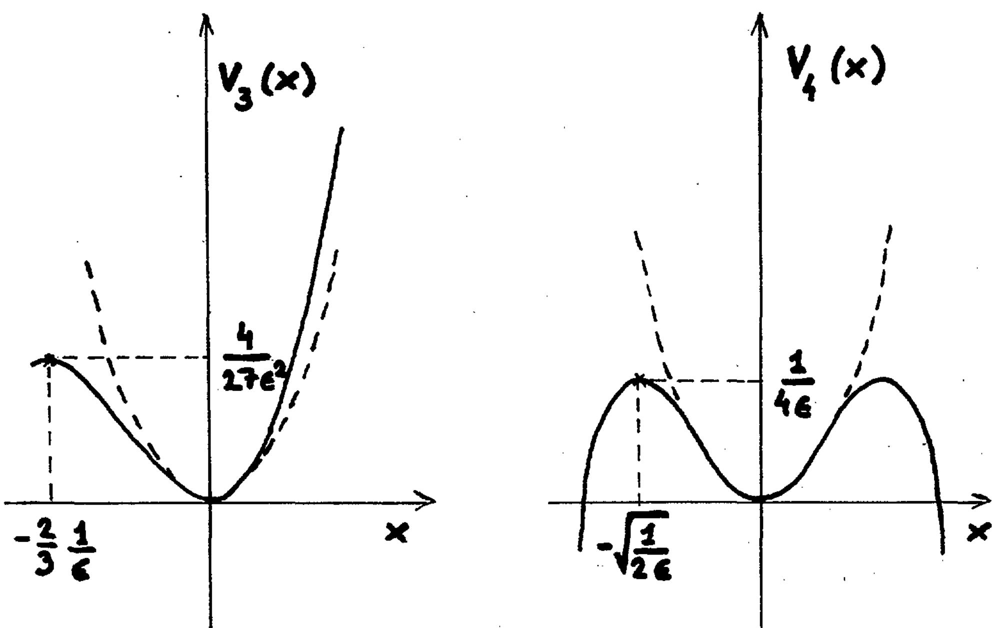

FIGURA 5

3. Atractores y catástrofes

En la sección anterior, hemos mencionado dos fenómenos que se dan siempre en un sistema físico real: uno es el de la disipación (por ejemplo de energía: el rozamiento), que acompaña siempre a todo proceso natural (irreversible), este hecho nos servía para suponer que íbamos a encontrar siempre a nuestro sistema exactamente en (o muy cerca de) el fondo del pozo de potencial (estado o fase «asintóticamente estable»). Un segundo hecho es que los estados inestables no son casi nunca observables: cuando la partícula está en lo alto del máximo de la fig-4, el más ligero empujón hubiera bastado para que cayera a uno de los dos mínimos. En la práctica, ningún experimento está libre de factores aleatorios, perturbaciones internas o externas más o menos grandes, que casi permiten asegurar que antes o después la partícula va a caer en uno de los dos mínimos y prácticamente nunca (salvo que se tomen precauciones muy especiales, o se mida durante un tiempo muy corto) en el máximo (1).

En el estudio de los sistemas dinámicos (por ejemplo, la partícula de la sección anterior) nos interesamos principalmente sólo por los puntos de equilibrio estable; y los llamamos además *atractores*: es decir, que siempre vamos a encontrar a nuestro sistema *en* ellos (o muy próximo a ellos) debido a que casi todas las posiciones iniciales que imaginemos llevan la partícula a dichos estados estables.

Antes de seguir adelante conviene quizás precisar, tanto desde el punto de vista físico como del matemático de qué «sistemas» vamos a ocuparnos. Para empezar, con relación a lo que precede, hay que señalar que los sistemas hamiltonianos de la mecánica clásica de pocos grados de libertad no tienen atractores; pero esto es debido a que son modelos en los que se prescinde de fuerzas disipativas; si estas se incluyen como hemos dicho, aparecen atractores. Pero lo interesante no es limitarse a sistemas «mecánicos» de unas pocas partículas, sino describir sistemas cuyo comportamiento macroscópico corresponda a procesos naturales y pueda hasta cierto punto (o «en cierta escala») modelarse por un sistema de ecuaciones diferenciales (ordinarias o parciales) o integrodiferenciales. Por necesidad de lo que sigue y debido a que exigimos que el sistema posesa un potencial (teorías de Landau o de Thom) nos limitaremos al atractor puede ser una trayectoria cerrada, una solución periódica o «ciclo límite»; con el tiempo todas las trayectorias caen hacia ella y el sistema describe entonces oscila-

(1) En términos físicos se dice que un estado estable (asintóticamente) tiene *vida media* («duración») infinita («muy grande» y de ahí que normalmente podamos observarlo). Una fase parcial o condicionalmente estable (técnicamente hablando, metaestable) tiene vida media finita (se la puede observar transitoriamente) y una fase inestable tiene vida media nula («muy corta»).

(2) Los modos considerados son, entonces, los grados de libertad del problema en el modelo considerado y se denominan variables colectivas del sistema. La descripción con variables colectivas (modos) debe contener lo que pretendemos describir del sistema original de variables individualizadas (partículas). Para describir la musicalidad de una cuerda de guitarra, es más sencillo utilizar los sonidos fundamental y armónicos que se pueden generar con ella y que son los modos de Fourier o variables colectivas de la cuerda, desconsiderando el que ésta se compone de individualidades que son las partículas que la forman materialmente.

caso de modelos reductibles a ecuaciones diferenciales ordinarias (e incluso de primer orden). Un ejemplo es el siguiente: en las ecuaciones (no lineales) de Navier-Stokes para el comportamiento de un fluido (en las variables tales como presión, velocidad, densidad y temperatura) y en general de la termodinámica o física de procesos naturales (disipativos e irreversibles) que son ecuaciones en derivadas parciales (en las variables espacio y tiempo), puede buscarse una solución en la forma de un desarrollo de Fourier aproximando la descripción mediante unos pocos modos (2), con amplitudes lentamente variables y obtener así un sistema de varias ecuaciones ordinarias para las amplitudes de esos pocos modos; es decir, una ecuación ordinaria en $\mathbb{R}^n$ (si n es el número de modos). Un punto de $\mathbb{R}^n$ (que sería ahora nuestro «espacio de estados») no representaría en absoluto el estado concreto de ninguna partícula del fluido, sino más bien los valores de una serie de magnitudes que describen macroscópicamente al mismo. Es decir, la evolución del fluido «como un todo» (o «a escala macroscópica») vendrá dada por la evolución de un punto en $\mathbb{R}^n$ bajo la ecuación diferencial considerada.

Nos vamos a interesar por los *cambios* en el comportamiento de estos sistemas «generales» cuando se varían los parámetros externos que rigen la dinámica del problema. En la sección anterior, teníamos estos cambios de comportamiento o saltos bruscos cuando ε en las fórmulas (2) y (3) pasaba de ser cero a ser mayor que cero (en la ecuación (3), los valores de ε negativo no cambian la forma del potencial x^4, así que el «cambio» importante se produce al pasar ε de negativo a positivo). Puesto que hemos considerado que nuestro sistema está siempre en un atractor, *identificaremos un cambio brusco en el comportamiento del sistema con un cambio en la naturaleza del atractor.*

Básicamente sólo hay dos cambios posibles: o bien el atractor en cuestión desaparece (es decir, se vuelve un punto de equilibrio inestable) al variar nuestros «parámetros de control», o bien aparece un segundo atractor «más fuerte» que el primero, a una cierta distancia de éste, que acaba arrastrando al sistema. Estas dos posibilidades dan lugar a las llamadas «catástrofes de bifurcación» y «catástrofes de conflicto», respectivamente.

En cuanto a los «parámetros de control», éstos dependerán del problema de que se trate: en una transición de fase termodinámica pueden ser la presión y la temperatura, por ejemplo; en el estudio de las ecuaciones que rijan el tamaño de una población de gusanos, la comida de que estos dispongan puede figurar como «parámetro de control», de manera que, variándola, pueda tenerse un súbito aumento de la población. E.C. Zeeman, que intentó modelar las contracciones y dilataciones del corazón mediante ecuaciones diferenciales y teoría de catástrofes, hizo de la presión arterial un «parámetro de control». Las posibilidades son, como se ve, enormemente variadas.

Aquellos valores de los parámetros de control para los que se produce una transición como las mencionadas (una catástrofe de bifurcación o de conflicto) se llaman puntos de catástrofe. Por ejemplo, el «punto de catástrofe» del sistema cuyo potencial está dado por la ecuación (3), $V_2(x)$ es ε nulo, ya que para ε negativo el punto $x = 0$ es un atractor y para ε positivo ya no lo es. La «catástrofe» que tiene lugar en $\varepsilon = 0$ es «de bifurcación», como lo sugiere la aparición de nuevos atractores (los dos mínimos) al lado del viejo, x = 0. El «espacio de parámetros», en este ejemplo es el conjunto de todos los posibles valores que puede adoptar $\mathcal{E}$ (o sea, todos los números reales).

Una situación interesante se produce cuando el sistema que nos interesa es un «objeto» tal que en cada punto del objeto tenemos una «dinámica» que depende de ese punto, es decir, del espacio (esto no es tan raro; de hecho, ocurrirá siempre que haya un campo externo espacialmente inhomogéneo; por ejemplo, un campo gravitatorio en un cuerpo grande, o la presión atmosférica, o el viento sobre una masa de aire o sobre nubes). En este caso, podemos decir que nuestro «parámetro de control» es, precisamente, el espacio (la posición r en el espacio). Cuando, variando r, llegamos a un punto, tal como la *frontera* del objeto (piénsese ahora, e.g., en una duna, en una gota de agua) donde se produce un cambio brusco (en la frontera, el objeto lisa y llanamente deja de existir como tal), podemos imaginar que es porque un atractor de la dinámica (desconocida) del objeto desaparece precisamente en ese punto y por tanto, que estamos ante un punto de catástrofe.

Desde una visión tan general, la frontera de un objeto macroscópico sería el conjunto de los puntos de catástrofe, en el espacio de los parámetros ($\mathbb{R}^3$), de un hipotético sistema dinámico asociado. Es posible ir aún más lejos: supongamos que la dinámica interna de un objeto depende, no solamente del espacio sino, asimismo del tiempo: entonces la *evolución temporal de la frontera* de ese objeto (piénsese ahora en una ola, en la frontera de un bosque, etc.) es el conjunto de los puntos de catástrofe de ese sistema, en $\mathbb{R}^4$, el espacio de parámetros en este caso (el espacio-tiempo). Cabe decir que la teoría de catástrofes es un intento de clasificar las posibles maneras en las que pueden producirse «catástrofes» (aparición o desaparición de atractores, etc.) en términos de unos pocos (técnicamente hablando) *modelos canónicos,* universales, a los que pueda reducirse casi todo sistema. Si los «conjuntos de puntos de catástrofe» de estos modelos son también en algún sentido canónicos, tendremos entonces, también «en algún sentido» (y a la vista de los dos párrafos que preceden), una *clasificación de las formas y de su desarrollo:* una teoría de la morfogénesis, como pretendía R. Thom («morfogénesis», originariamente, es un término usado en biología para significar el «desarrollo de la forma y la estructura» en un ser vivo; la conexión con la biología está presente a lo largo de todo el libro citado de Thom, cuyo prólogo, de hecho, está escrito por un biólogo). Hay que precisar todo lo que acabamos de decir, por supuesto: entre otras cosas, en qué sentido cabe entender eso de la «clasificación de las formas». El lector familiarizado con las matemáticas sabe que se va a tratar de una clasificación más o menos topológica, esto es, «salvo difeomorfismos». Antes de abordar aunque muy someramente esta cuestión conviene hacer un par de aclaraciones.

La primera es que hasta ahora hemos estado hablando vagamente de «atractores» de sistemas dinámicos y pensando en atractores puntuales. El hecho es que en sistemas dinámicos de más de una dimensión existe toda una gama de atractores posibles. En dos dimensiones, un ciclo límite (3) ... ciones, de amplitud y períodos fijos, indefinidamente. Un caso muy conocido de esto es el oscilador de Van der Pol, de ecuación

$$\begin{pmatrix} dx_1/dt \\ dx_2/dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ \varepsilon(1-x_1)\,x_2 - x_1 \end{pmatrix}$$

Las trayectorias de este sistema en el espacio (x_1, x_2), son como indica la fig. 6.

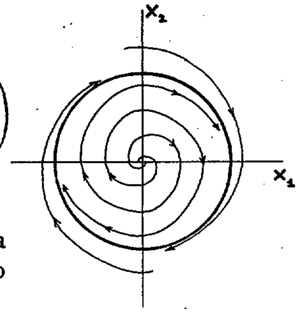

FIGURA 6

En más dimensiones, pueden aparecer otros atractores menos sencillos (pueden, incluso, ser objetos muy complicados).

El interés de este tipo de atractores para nuestro propósito estaría en que un atractor, puntual, tal como los que hemos venido discutiendo, puede *bifurcar hacia un ciclo límite* (3). Esto se conoce como bifurcación de E. Hopf. Esta bifurcación es también una «catástrofe», como lo sería, en tres dimensiones, la bifurcación de un ciclo límite a un *toro* atractor (un neumático de coche), etc. El estudio y la clasificación de este tipo de bifurcaciones (que suponen, sin duda, cambios drásticos en el comportamiento del sistema) no entra, sin embargo, hoy por hoy, dentro de lo conocido en la teoría de catástrofes. De hecho hasta hoy, el gran propósito de Thom, de clasificar *todas* las posibles catástrofes, solo se ha hecho realidad para una pequeña clase de sistemas dinámicos; de esto se ocupa la llamada «teoría elemental de catástrofes» (abreviada usualmente ECT). A diferencia de la más ambiciosa (pero hoy por hoy matemáticamente inexistente) teoría de catástrofes en sentido general, que sería idealmente la clasificación de todas las posibles «catástrofes» (de bifurcación o de conflicto) de todos los posibles «sistemas dinámicos» (o «campos de vectores»), la teoría elemental de catástrofes es una clasificación de las posibles bifurcaciones de familias de *funciones* reales de n variables reales. Para que esta teoría sea de alguna utilidad en la investigación emprendida, sobre los cambios en el comportamiento cualitativo de los sistemas dinámicos, es preciso que se pueda asociar al sistema dinámico (o la *familia* de sistemas dinámicos, parametrizada por nuestros parámetros de control) que estudiemos, una *función* (o familia de funciones) que nos dé información sobre el comportamiento de las soluciones. Naturalmente, ésta será siempre en algún sentido una «función potencial».

(3) Un ciclo límite es una solución periódica estable. Volveremos sobre ello en el artículo 3 de esta serie.

REFERENCIAS

T. Poston e I. Stewart, CATASTROPHE THEORY AND ITS APPLICATIONS, Pitman, Londres, 1978.

R. Thom, STRUCTURAL STABILITY AND MORPHOGENESIS, Benjamín-Addison Wesley, Nueva York, 1975.

M.G. Velarde y Ch. Normand, Convection, Scientific American, Julio 1980 (traducido en Investigación y Ciencia, Septiembre 1980).

E.C. Zeeman, Catastrophe Theory, Scientific American, Abril 1976.

E.C. Zeeman, CATASTROPHE THEORY: SELECTED PAPERS, Addison Wesley, 1977.